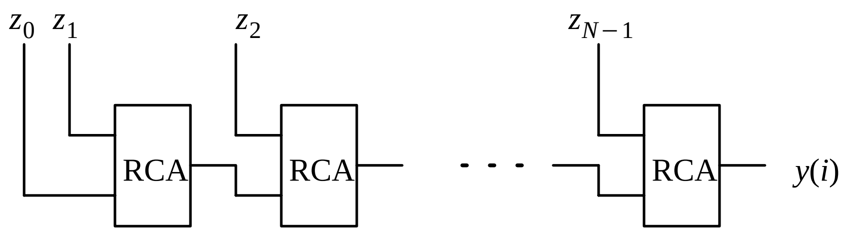
Solutions for Chapter 6

Exercise 6.1

Es sind gegeben: N Produkte z_i , Filterergebnis $y(i)$, Verzögerungszeit des Carrypfades eines Volladddierers T_c und für den Summenpfad $2T_c$

a. Carry–Ripple–Addierer:

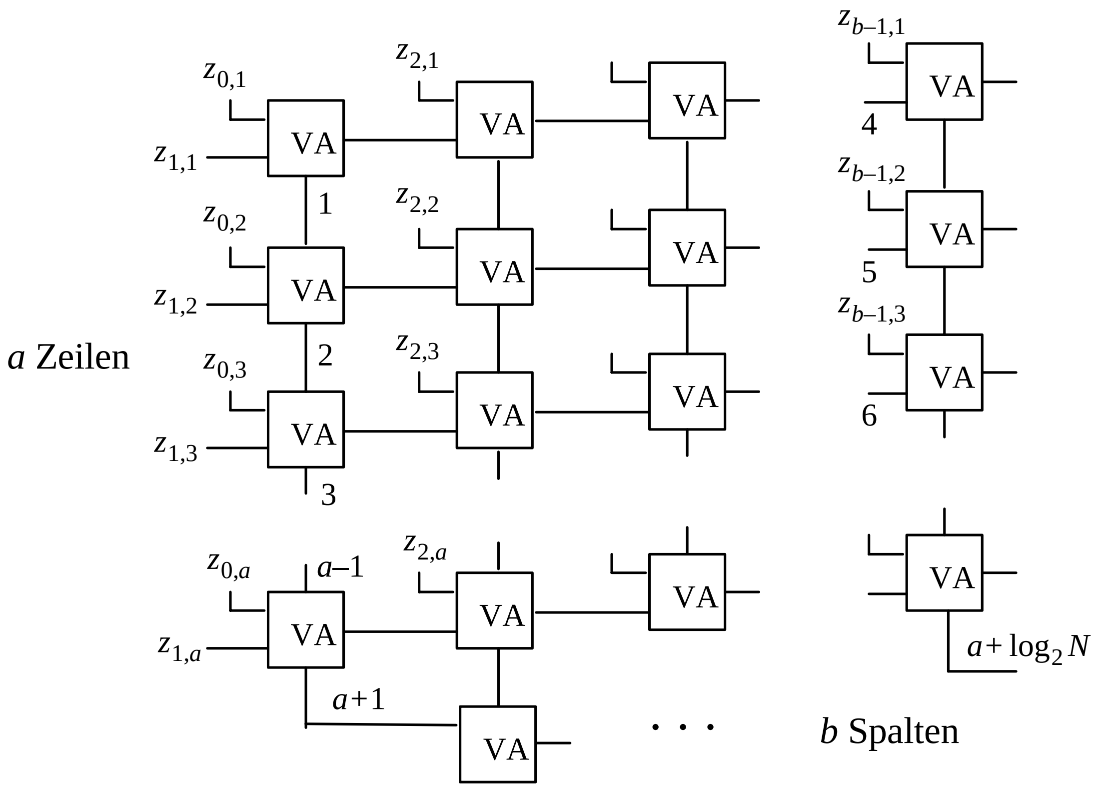


Eine obere Grenze für die Anzahl der Volladdierer ergibt sich als Produkt aus der Anzahl der Addiererstufen und der Addiererwortbreite am Ausgang:
$n_{VA} \leqslant (N - 1)(m_x + m_c - 1 + \log_2 N)$

Eine genauere Betrachtung, die die anwachsende Wortbreite mit berücksichtigt ergibt:

$$n_{VA} = (N - 1)(m_x + m_c) + \sum_{i=2}^{N} \log_2 i$$

Für die Bestimmung der Verzögerung ist ein Diagramm hilfreich:

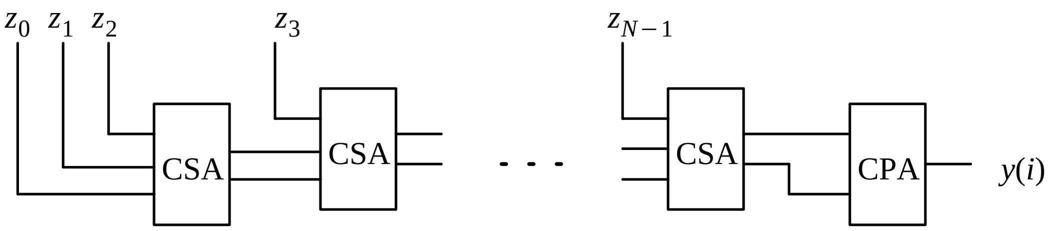


Für die Verzögerungszeit ergibt sich unter Berücksichtigung der Addiererwortbreite am Ausgang:

$a = m_x + m_c\,,\ a' = m_x + m_c + \log_2 N\,,\ b = N - 1$

$T_{ADD} = (N-1)T_s + (a'-1)T_c = (m_x + m_c + 2N + \log_2 N - 3)T_c$

b. Carry–Save–Addierer:



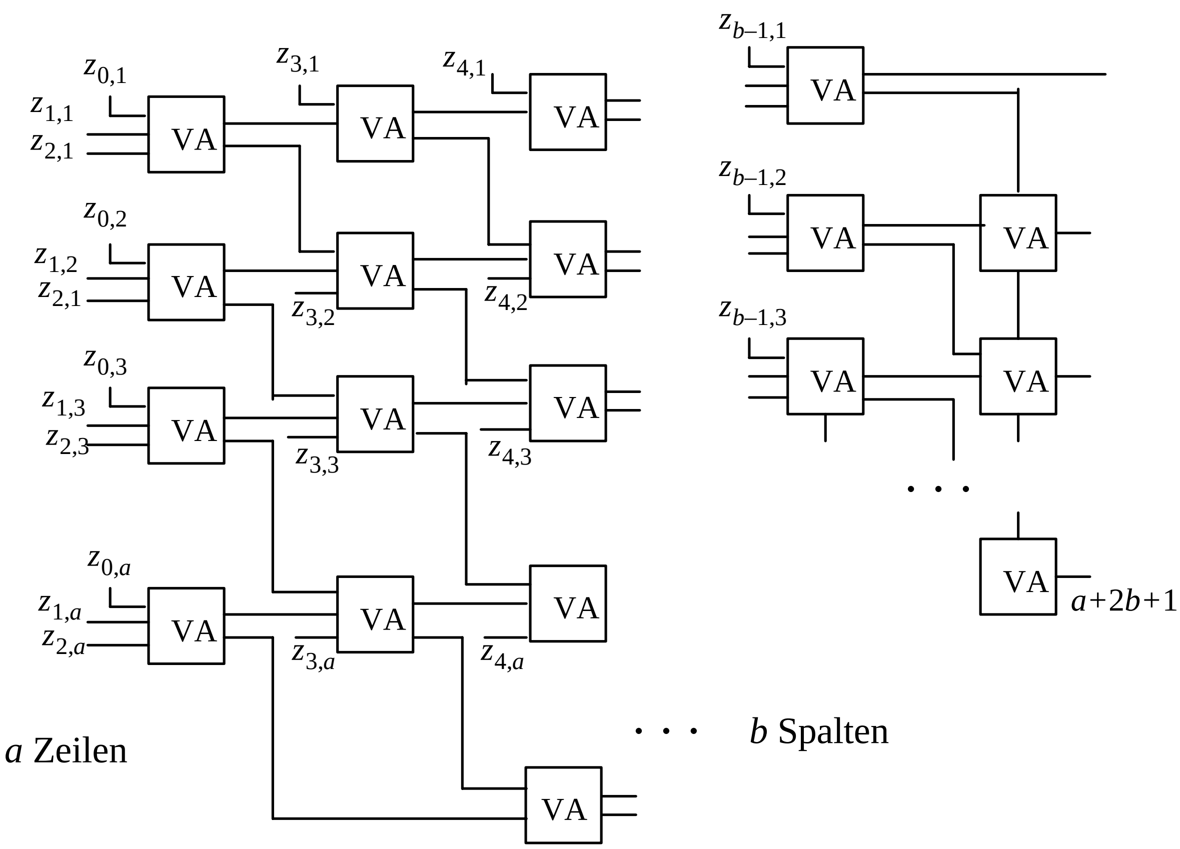
Als obere Grenze für die Anzahl der Volladdierer ergibt sich:

$$n_{VA} = (N-2)(m_x + m_c) + m_x + m_c - 1 + \lceil \log_2 N \rceil$$
$$= (N-1)(m_x + m_c) - 1 + \lceil \log_2 N) \rceil$$

Eine genauere Betrachtung, die die anwachsende Wortbreite mit berücksichtigt ergibt::

$$n_{VA} = (N-2)(m_x + m_c) + m_x + m_c - 1 + \log_2 N + \sum_{i=2}^{N-3} \log_2 i$$

Für die Bestimmung der Verzögerung ist ein Diagramm hilfreich, in dem die Verzögerungszeiten als Vielfache von T_c eingetragen sind.



$$a = m_x + m_c\,, \quad a' = m_x + m_c - 1 + \log_2 N\,, \;\; b = N - 2$$

$$T_{ADD} = (N-2)T_s + (m_x + m_c + \log_2 N - 1)T_c = (m_x + m_c + 2N + \log_2 N - 5)T_c$$

c. CSA–Addiererbaum:
N Eingänge: $N - 2$ CS–Addierer + 1 CP–Addierer, wobei der Baum eine Anzahl von n_s Stufen mit CS–Addierern aufweist.
$\Rightarrow n_{VA}$ wie unter b.

Für die Verzögerungszeit gilt dagegen in Abhängigkeit der Die der Stufen n_s eines CSA–Addiererbaumes:
$a = m_x + m_c - 1 + \log_2 N$, $b = n_s$
$T_{ADD} = (m_x + m_c + \log_2 N + 2n_s)T_c$

Die Anzahl der Stufen n_s eines CSA–Addiererbaumes kann in Abhängigkeit von der Zahl der Eingänge N wie folgt (näherungsweise) bestimmt werden:
$n_s = \left\lfloor \frac{\ln N}{0,4} - 1,71 \right\rfloor$

d. Die Lösungen a. und b. weisen die gleiche Gesamtdurchlaufzeit T_{ADD} auf, erfordern also (für eine vergleichbare Durchsatzrate) auch die gleiche Zahl n_{pipe} an Pipelinestufen. Auch der Aufwand für die Pipeline–Register ist bei Lösung aund b gleich.

Setzt man die Pipeline Register zwischen den Volladierern an, so weist die Lösung c dieselbe Durchsatzrate bei einem vergleichbarem Aufwand wie die Lösungen a und b auf. Geht man jedoch von der kleineren Gesamtdurchlaufzeit T_{ADD} aus, und verwendet dieselbe Anzahl an Pipeline–Stufen wie in a oder b, so wird sich der Durchsatz, bei gleichzeitig gestiegenem Aufwand, erhöhen. Dies setzt jedoch voraus, daß die Volladierer intern ge–pipelined werden können.

Exercise 6.2

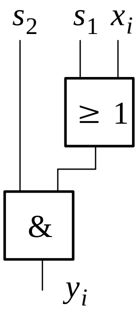
a.

$$(11)_{10} = 1\;0\;\bar{1}\;0\;\bar{1}$$
$$(19)_{10} = 1\;0\;1\;0\;\bar{1}$$
$$(5)_{10} = 0\;0\;1\;0\;1$$
$$(-\,3)_{10} = 0\;0\;\bar{1}\;0\;1$$

b.

c.

d. Limiterfunktion für die Stellen von x :



s_1	s_2	y_i
0	1	x_i
x	0	0
1	1	1

Funktionalität :

x_{n-1}	x_{n-2}	y
0	x	x
1	0	255
1	1	0

$$s_1 = x_{n-1}$$
$$s_2 = \overline{x_{n-1} \wedge x_{n-2}}$$

Exercise 6.3

a. $H_0(z) = \sum_{k=0}^{9} h(k)z^{-k}$ gegeben, der Ansatz für QMF–Filter liefert:

$H_1(z) = H_0(-z) = \sum_{k=0}^{9} (-1)^{-k} h(k) z^{-k}$

Filterfunktion des Hochpaßfilters in der Analysefilterbank:

$h_1 = \frac{1}{512}[8;\ 1;-43;-44;\ 248;-248;\ 44;\ 43;-1;-8]$

$G_0(z) = 2H_0(z)$

Filterfunktion des Tiefpaßfilters in der Synthesefilterbank:

$g_0 = \frac{1}{256}[8;-1;-43;\ 44;\ 248;\ 248;\ 44;-43;-1;\ 8]$

$G_1(z) = -2H_0(-z) = -2H_1(z)$

Filterfunktion des Hochpaßfilters in der Synthesefilterbank:

$g_1 = \frac{1}{256}[-8;-1;\ 43;\ 44;-248;\ 248;-44;-43;\ 1;\ 8]$

b. $H_{00}(z^2) = \frac{1}{2}[H_0(z) + H_1(z)]$

$h_{00}(m) = \frac{1}{512}[8;-43;\ 248;\ 44;-1]$

$H_{01}(z^2) = \frac{z}{2}[H_0(z) - H_1(z)]$

$h_{01}(m) = \frac{1}{512}[-1;\ 44;\ 248;-43;\ 8]$

$G_{00}(z^2) = \frac{1}{2}[G_0(z) - G_1(z)]$

$g_{00}(m) = \frac{1}{256}[8;-43;\ 248;\ 44;-1]$

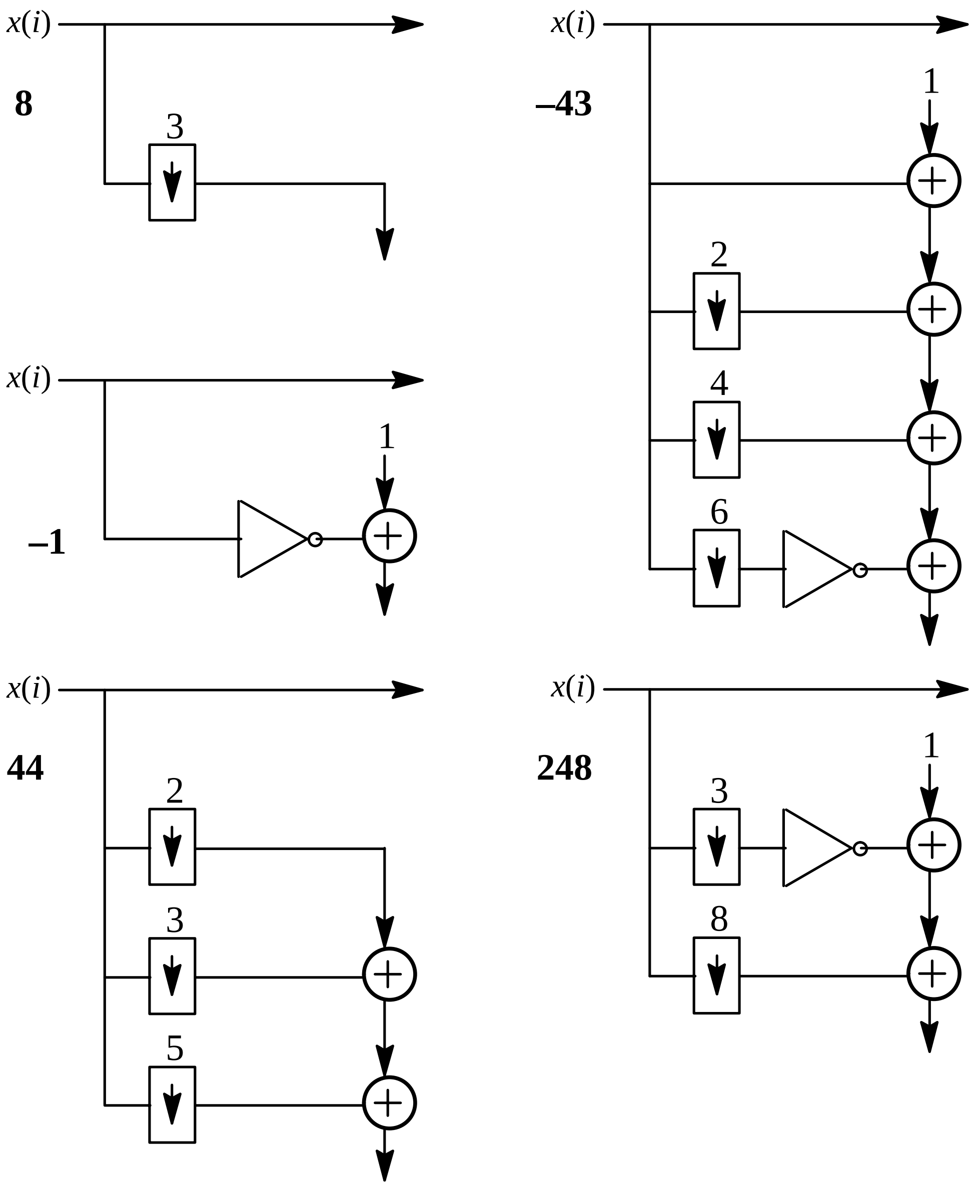
$G_{01}(z^2) = \frac{z}{2}[G_0(z) + G_1(z)]$

$g_{01}(m) = \frac{1}{256}[-1;\ 44;\ 248;-43;\ 8]$

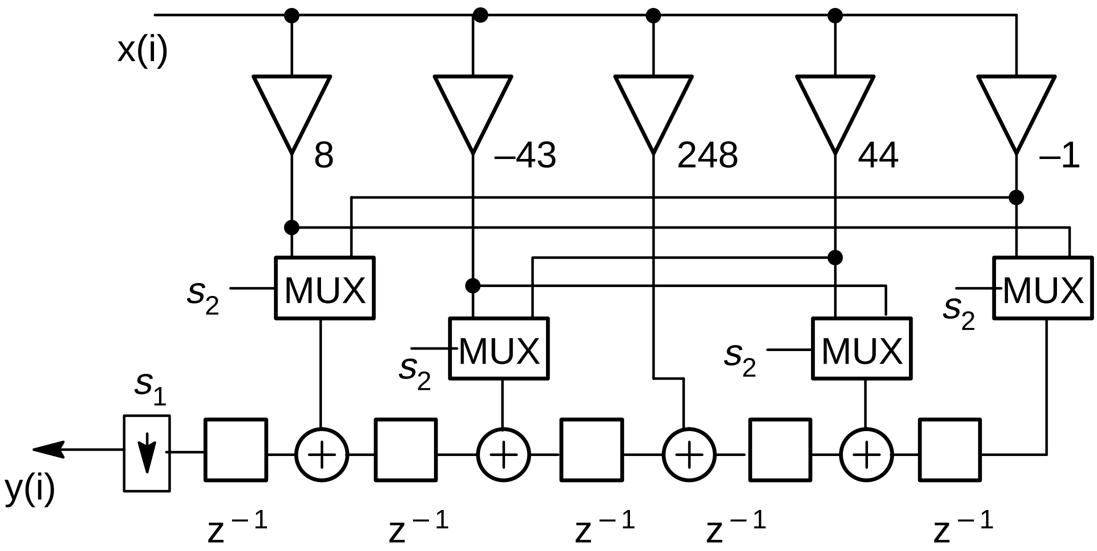
c.

$$(8)_{10} = 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0$$
$$(-43)_{10} = 0\ 0\ \overline{1}\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1$$
$$(248)_{10} = 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ \overline{1}\ 0\ 0\ 0$$
$$(44)_{10} = 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0$$
$$(-1)_{10} = 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ \overline{1}$$

Multipliziererrealisierungen mit festen Koeffizienten ergeben für die verschiedenen Koeffizienten:



Die Gesamtschaltung des Moduls benötigt zwei Steuersignale s_1 und s_2. Bei Verwendung der Direktform II ergibt sich:



Die Beschaltung der Steuersignale erfolgt gemäß:

Funktion	s_1	s_2
$h_{00}(m)$	9	0
$h_{01}(m)$	9	1
$g_{00}(m)$	8	0
$g_{01}(m)$	8	1

Exercise 6.4

Exercise 6.5

a. $$y(i) = \frac{\sqrt{3}}{2}y(i–1) - \frac{1}{4}y(i–2) + x(i)$$

$$y(i–1) = \frac{\sqrt{3}}{2}y(i–2) - \frac{1}{4}y(i–3) + x(i–1)$$

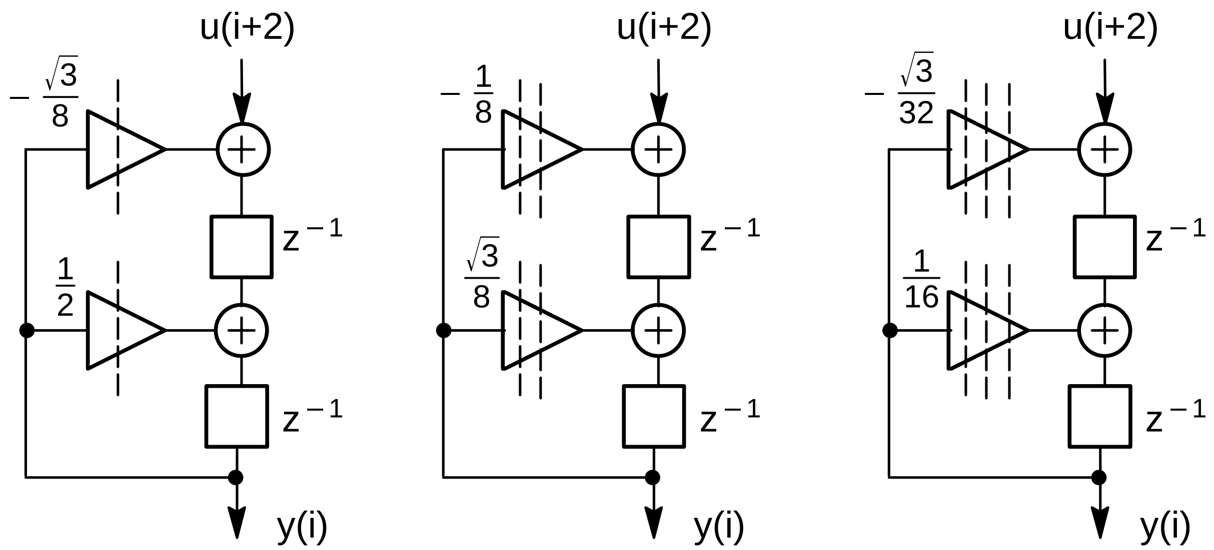
$$\Rightarrow y(i) = \frac{1}{2}y(i–2) - \frac{\sqrt{3}}{8}y(i–3) + x(i) + \frac{\sqrt{3}}{2}x(i–1)$$

$$y(i–2) = \frac{\sqrt{3}}{2}y(i–3) - \frac{1}{4}y(i–4) + x(i–2)$$

$$\Rightarrow y(i) = \frac{\sqrt{3}}{8}y(i–3) - \frac{1}{8}y(i–4) + x(i) + \frac{\sqrt{3}}{2}x(i–1) + \frac{1}{2}x(i–2)$$

$$y(i–3) = \frac{\sqrt{3}}{2}y(i–4) - \frac{1}{4}y(i–5) + x(i–3)$$

$$\Rightarrow y(i) = \frac{1}{16}y(i–4) - \frac{\sqrt{3}}{32}y(i–5) + x(i) + \frac{\sqrt{3}}{2}x(i–1) + \frac{1}{2}x(i–2) + \frac{\sqrt{3}}{8}x(i–3)$$



a.) **b.)** **c.)**

a.) $u(i) = x(i) + \frac{\sqrt{3}}{2}x(i–1)$

b.) $u(i) = x(i) + \frac{\sqrt{3}}{2}x(i–1) + \frac{1}{2}x(i–2)$

c.) $u(i) = x(i) + \frac{\sqrt{3}}{2}x(i–1) + \frac{1}{2}x(i–2) + \frac{\sqrt{3}}{8}x(i–3)$

b. $$H(z) = \frac{1}{1 - a(1)z^{-1} - a(2)z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 - a(1)z - a(2)} = \frac{z^2}{(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)}$$

Pole bei : $\alpha_1 = \dfrac{\sqrt{3} + i}{4}$ und $\alpha_2 = \dfrac{\sqrt{3} - i}{4}$

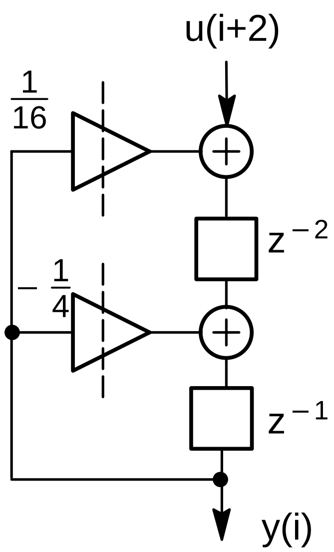
$$\frac{1}{z - \alpha} = \frac{z + \alpha}{z^2 - \alpha^2} = \frac{z^2 + \alpha z + \alpha^2}{z^3 - \alpha^3} = \frac{z^3 + \alpha z^2 + \alpha^2 z + \alpha^3}{z^4 - \alpha^4}$$

$$H(z) = \frac{z^2(z + \alpha_1)(z + \alpha_2)}{(z^2 - {\alpha_1}^2)(z^2 - {\alpha_2}^2)} \text{ und } \alpha_1\alpha_2 = \frac{1}{4}, \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = \frac{1}{4}$$

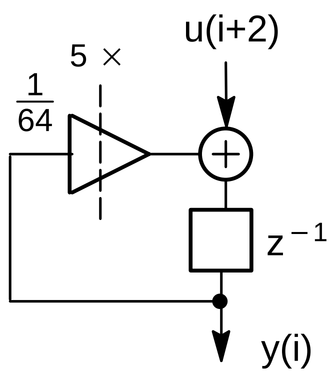
$$\Rightarrow H(z) = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}}{1 - \frac{1}{4}z^{-2} + \frac{1}{16}z^{-4}}$$

$$H(z) = \frac{z^2(z^2 + \alpha_1 z + \alpha_1^2)(z^2 + \alpha_2 z + \alpha_2^2)}{(z^3 - {\alpha_1}^3)(z^3 - {\alpha_2}^3)} \text{ und } \alpha_1^3 + \alpha_2^3 = 0$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} + \frac{\sqrt{3}}{8}z^{-3} + \frac{1}{16}z^{-4}}{1 + \frac{1}{64}z^{-6}}$$



a.)



b.)

a.) $u(i) = x(i) + \frac{\sqrt{3}}{2}x(i-1) + \frac{1}{4}x(i-2)$

b.) $u(i) = x(i) + \frac{\sqrt{3}}{2}x(i-1) + \frac{1}{2}x(i-2) + \frac{\sqrt{3}}{8}x(i-3) + \frac{1}{16}x(i-4)$

Bei beiden Lösungen können die Multiplikationen im rekursiven Teil mit Shiftoperationen realisiert werden, so daß die Anzahl der Pipelinestufen irrelevant ist. Lösung a. erfordert im nichtrekursiven Teil deutlich weniger Aufwand gegenüber einem Addierer Mehraufwand im rekursiven Teil. Weiterhin ist die Dynamik der Koeffizienten bei a. geringer, so daß eine geringere Wortbreite ausreicht. Damit ist Lösung a. zu bevorzugen.